NOTAS DE AULA

SEQÜENCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Cláudio Martins Mendes

Primeiro Semestre de 2006

Sumário

Capítulo 1

Seqüências e Séries Numéricas

1.1 Seqüências Numéricas

Uma seqüência de números reais pode ser entendida como uma lista infinita e ordenada de números reais, como, por exemplo:

$$0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 4}, \cdots \frac{1}{\ln 2^n}, \cdots$$

Eis a definição:

Definição 1.1.1. *Uma seqüência é uma função definida no conjunto dos números naturais, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $a_n \in \mathbb{R}$.*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Notações: $\begin{cases} (a_n) \\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \end{cases}$

Exemplos:

1. Sendo $a_n = \dfrac{1}{n}$, temos a seqüência $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots$

2. Sendo $a_n = 6$, temos a seqüência constante:

$$6, 6, \ldots 6, \ldots$$

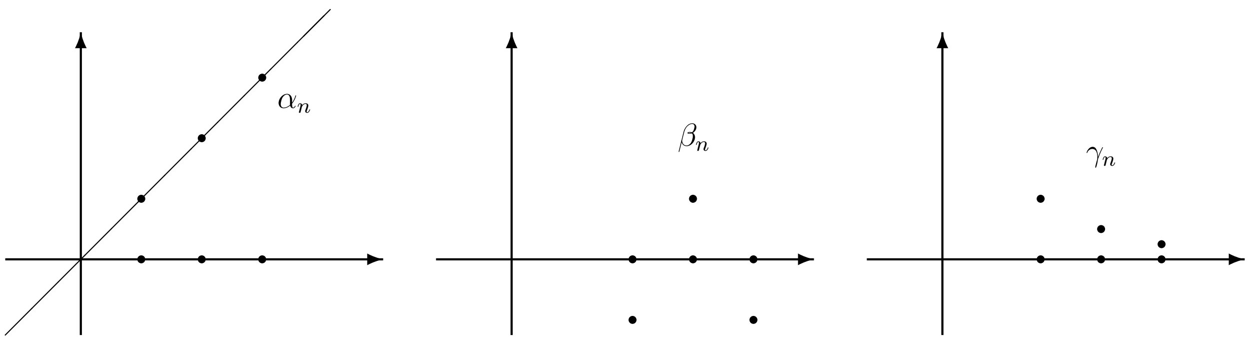
3. Sendo (a_n) onde $\begin{cases} a_{2n-1} = 7 \\ a_{2n} = 4 \end{cases}$ temos

$$7,\, 4,\, 7,\, 4,\, \ldots$$

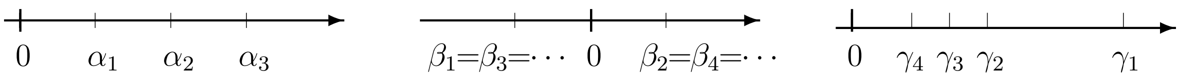
Consideremos as seqüências:

$$\alpha_n = n\,; \quad \beta_n = (-1)^n \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{1}{n}\,.$$

Como funções eles podem ter os seus gráficos traçados, mas ele geralmente são pouco significativos.



Uma representação mais conveniente para seqüências pode ser obtida colocando-se os pontos $a_1\,,\, a_2\,,\, a_3\,,\, \ldots$ sobre uma reta.



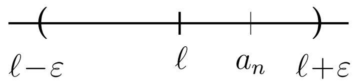
Esta representação pode mostrar para onde a seqüência "está indo".

A seqüência (α_n) "diverge"para infinito, a seqüência (β_n) é dita "oscilante"e a seqüência (γ_n) "converge para 0".

Todas estas frases podem ser definidas precisamente, e é o que faremos.

Definição 1.1.2. *A seqüência (a_n) é dita* ***convergente com limite $\boldsymbol{\ell}$*** *se para cada $\varepsilon > 0$ dado, $\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$.*

Observe: $-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$ ou seja $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.



A partir de um certo N todos os a_n estão no intervalo $(\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon)$.

Da arbitrariedade do ε temos que os a_n vão se juntando em torno de ℓ .

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ou $(a_n) \to \ell$.

Observação 1. Note que a definição anterior é muito parecida com a de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, vista anteriormente.

Observação 2. Quando uma seqüência tem limite 0 frequentemente ela será dita ***infinitésima***.

Exemplos:

1. $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$ De fato:
   Dado $\varepsilon > 0$.
   Queremos: $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$
   mas $n > N \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N}$.
   Basta então tomar N tal que $\dfrac{1}{N} \leq \varepsilon$ [ou seja: $N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$] .

2. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 1$
   De fato:
   Dado $\varepsilon > 0$.
   Queremos: $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$
   mas $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$ e
   $n > N \Rightarrow n+1 > N+1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{N+1}$.
   Basta tomar então $N \geq \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, $N \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.3. *Uma seqüência (a_n) é dita* ***divergente*** *quando ela não é convergente.*

Resultado: Toda seqüência divergente é sempre de um dos tipos:

(I) ***Seqüência divergente para*** $+\infty$

Uma seqüência (a_n) é dita divergente para $+\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \Rightarrow a_n > K$.

(II) ***Seqüência divergente para*** $-\infty$

Uma seqüência (a_n) é dita divergente para $-\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \Rightarrow a_n < -K$.

(III) ***Seqüência oscilante***

Uma seqüência (a_n) é dita oscilante quando diverge, mas nem para $+\infty$ e nem para $-\infty$.

Definição 1.1.4. *O conjunto* $\{a_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ *é chamado* **conjunto de valores** *da seqüência* (a_n).

Exemplos:

1. $(cos(n\pi))$. Conjunto de valores: $\{-1, 1\}$
2. $(\frac{1}{n})$. Conjunto de valores: $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$

Observação: Uma seqüência pode ser multiplicada por um número e duas seqüências podem ser somadas, da mesma maneira como estas operações são feitas com funções com contra domínio $\mathbb{R}$, pois são particulares funções deste tipo.

Então:

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n)\\ c \cdot (a_n) &= (c \cdot a_n)\end{aligned}$$

Ainda: Podemos multiplicar duas seqüências fazendo:

$$(s_n) \cdot (t_n) = (s_n \cdot t_n)$$

mais ainda: Se $t_n \neq 0$, $\forall\, n$, então

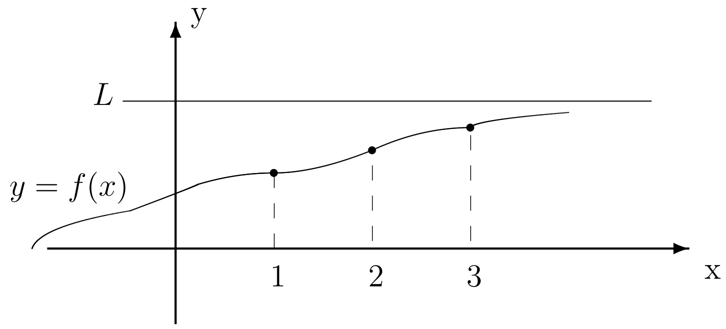
$$\frac{(s_n)}{(t_n)} = \left(\frac{s_n}{t_n}\right) .$$

Para o cálculo de limite, usaremos o seguinte resultado, bastante intuitivo:

Teorema 1.1.5 (Teorema da Substituição). *Se*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L\,, \qquad \textit{então} \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = L\ ,$$

L sendo um número real, $-\infty$ ou ∞ .



Observação: A recíproca do resultado anterior é falsa, em geral. Por exemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x) \quad \text{não existe}$$

Exemplos:

1. Para $p > 0$ inteiro,
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0\,; \quad \text{logo} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0\ .$$

2. Como $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e\,,$ vale igualmente que $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

3. Como $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ então $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ ou seja, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{e^{2n}} = ?$

   Calculemos $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3}{e^{2x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{18x}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{18}{8e^{2x}} = 0\ ,$$

onde aplicamos a Regra de L'Hôpital repetidamente, sempre verificando em cada passagem intermediária que ainda temos uma forma indeterminada.

Pelo Teorema da Substituição:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{e^{2n}} = 0\ .$$

Limites de seqüências têm propriedades semelhantes a limites de funções, vistos anteriormente. Enunciaremos algumas delas:

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ então:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm M$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, L \quad (c \in R)$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = L \cdot M$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{L}{M} \quad$ (se $M \neq 0$) .

Outra propriedade análoga ao caso de limite de função é a seguinte:

- Se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (*)$

Exemplos:

1. $\left(\dfrac{1}{n} - 2\cos(\dfrac{\pi}{n})\right) \to \ ?$

   $\left(\dfrac{1}{n} - 2\cos(\dfrac{\pi}{n})\right) \to \ 0 - 2\cdot 1 = -2$

2. $\left(\dfrac{1}{n} \cdot \cos(\dfrac{\pi}{n})\right) \to \ ?$

   $\left(\dfrac{1}{n} \cdot \cos(\dfrac{\pi}{n})\right) \to \ 0\cdot 1 = 0$

3. $\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \to \ ?$

   $\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{n}\right) \to \ 0\cdot 0 = 0$

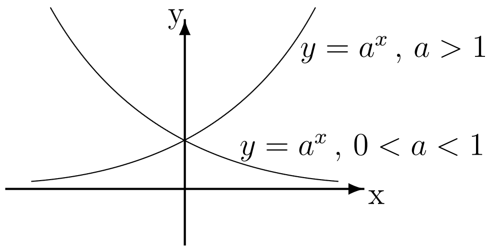
4. Sendo r um número real, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ 1 & \text{se} \quad r = 1\,. \end{cases}$

   Se $|r| > 1$ ou $r = -1$ a seqüência (r^n) é divergente.

   De fato:

   $\lim\limits_{x\to\infty} |r|^x = 0$ se $|r| < 1$.

   Pelo Teorema da Substituição, $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = 0$ ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} |r^n| = 0$.



Pela propriedade $(*)$ anterior temos que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$.

- Se $r = 1$, temos $r^n = 1$ e daí $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$
- Se $r = -1$, temos $r^n = (-1)^n$ e assim (r^n) é divergente.
- $\lim\limits_{x\to\infty} |r|^x = \infty$ se $|r| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = \infty$

Neste caso os termos da seqüência (r^n) correspondentes a valores pares de n crescem além de qualquer número quando n aumenta, o que a impede de ser convergente.

Uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante r é dita **progressão geométrica (P.G.) de razão *r***.

$a_1,\ \ r\,a_1,\ \ r^2a_1,\ \ r^3a_1,\ \cdots$ ou seja $a_n = a_1\, r^{n-1}$.

Pelo exemplo anterior e usando a propriedade (ii) temos que se $|r| < 1$ a PG é convergente a $\mathbf{0}$. Deixamos para o leitor o estudo do caso $|r| \geq 1$.

Vamos agora enunciar o mais importante Teorema para seqüências. Para isso necessitaremos dos seguintes conceitos:

Definição 1.1.6. *Uma seqüência (a_n) é dita:*

(i) ***crescente*** *se* $a_{n+1} \geq a_n\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(ii) ***estritamente crescente*** *se* $a_{n+1} > a_n\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(iii) ***decrescente*** *se* $a_{n+1} \leq a_n\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

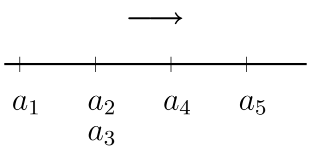
(iv) ***estritamente decrescente*** *se* $a_{n+1} < a_n\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(v) ***monótona*** *se for de um dos tipos acima.*

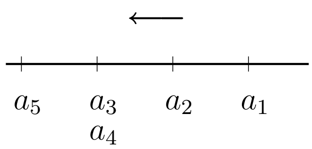
Definição 1.1.7. • (a_n) *é dita* ***limitada superiormente*** *se, para algum número real* A, *tem-se* $a_n \leq A, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

- (a_n) *é dita* ***limitada inferiormente*** *se, para algum número real* B, *tem-se* $B \leq a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

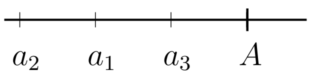
- (a_n) *é dita* ***limitada*** *se for limitada superior e inferiormente.*



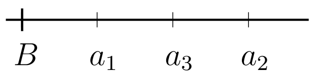
seqüência crescente



seqüência decrescente



seqüência limitada superiormente



seqüência limitada inferiormente

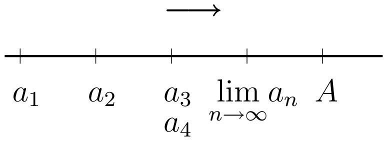
Teorema 1.1.8 (Teorema Fundamental sobre Seqüências).

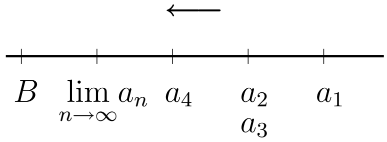
(a) Toda seqüência crescente e limitada superiormente é convergente.

(b) Toda seqüência decrescente e limitada inferiormente é convergente.

Observação 1. No caso (a) se $a_n \leq A,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ então $a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq A$.

No caso (b) se $B \leq a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ então $B \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq a_n$.

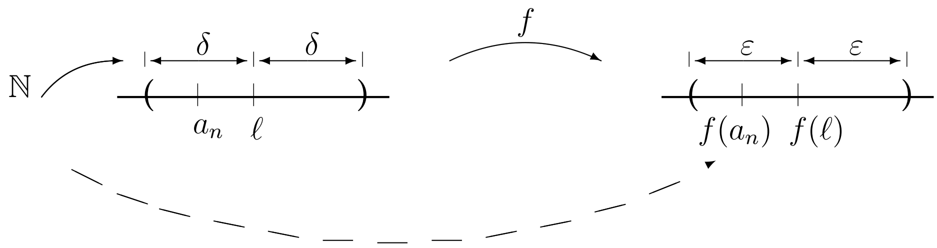




Observação 2. Se (a_n) é crescente e não é limitada superiormente então a_n supera qualquer número positivo, para todo índice suficientemente grande, logo, diverge para ∞.

De modo análogo se (a_n) é decrescente e não é limitada inferiormente, ela diverge para $-\infty$.

Teorema 1.1.9. *Seja f uma função contínua em ℓ. Se $(a_n) \to \ell$ e a_n pertence ao domínio de f, para cada n, então $(f(a_n)) \to f(\ell)$.*



Observação: O teorema anterior em outra notação:

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$

então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

Exemplos:

1. $\left(\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right) \to \ ?$

   - $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to \ 1$
   - $\ln$ é contínua em 1.

   Assim $\left(\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right) \to \ \ln 1 = 0$

2. $\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right) \to \ ?$

   $\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \to 1$ e como $\sqrt{\ }$ é contínua em 1 temos que $\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right) \to \sqrt{1} = 1$.

Propriedades: (Tente provar)

1. Se $a_n \le b_n$ para $n \ge k$ e se $(a_n) \to L$ e $(b_n) \to M$ então $L \le M$.

2. Se $a_n \leq b_n$ para $n \geq k$ e se $(a_n) \to \infty$ então $(b_n) \to \infty$.

3. Se (a_n) é limitada e $(b_n) \to 0$ então $(a_n \cdot b_n) \to 0$.

Teorema 1.1.10 (Teorema do Sanduiche). *Se existe um número k tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq k$ e se $(a_n) \to \ell$ e $(c_n) \to \ell$ então $(b_n) \to \ell$.*

Exemplos:

1. $\left(\dfrac{\cos n}{n}\right) \to 0$

   De fato:
   $$0 \leq \left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \quad ; \quad (0) \to 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{n}\right) \to 0\,.$$
   Logo, pelo Teorema do Sanduiche, $\left(\left|\dfrac{\cos n}{n}\right|\right) \to 0$. Assim, $\left(\dfrac{\cos n}{n}\right) \to 0$.

2. $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right) \to 0$

   De fato:
   $$0 < \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n} \quad \cdots \qquad \text{continue ...}$$

3. Discuta a convergência da seqüência $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.

   Primeiramente note que neste caso não é possível o uso do Teorema da Substituição.
   $a_1 = 1\,,\ a_2 = \dfrac{1\cdot 2}{2\cdot 2}\,,\ a_3 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}\,,\ \ldots\,,\ a_n = \dfrac{1\cdot 2\ \cdots\ n}{n\cdot n\ \cdots\ n}\,.$
   Notemos que $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}\ \cdots\ \dfrac{n}{n}\right)$ e assim
   $$0 < a_n \leq \frac{1}{n}\,.$$
   Como $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0\,,$ pelo Teorema do Sanduíche temos que $(a_n) \to 0$.

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) \to \infty\,.$

   De fato:
   $$\frac{n+1}{\sqrt{2n}} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n+1 \text{ parcelas}}$$
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \overset{\text{Teo. Subst.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2x}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2x} = \infty$$

Logo, pela propriedade 2 anterior temos o resultado.

Propriedade: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, para qualquer valor de $k \in \mathbb{N}$.
Em linguagem corrente: Isto significa que não se altera a convergência de uma seqüência quando se desconsidera um número finito de termos.

Exercícios:

1. Considere $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Prove que $(s_n) \to \infty$.
   Resolução: Como (s_n) é crescente, existem duas possibilidades, a saber:

   (i) (s_n) é limitada superiormente e assim pelo Teorema Fundamental para seqüências (s_n) seria convergente.

   (ii) (s_n) não é limitada superiormente e assim $(s_n) \to \infty$.

$$s_1 = 1\,,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2}\,,\ s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,,$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 3 \cdot \frac{1}{2}\,,\quad s_5\,, \ldots$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 4 \cdot (\frac{1}{2})\,.$$

   Pode-se mostrar, por indução, que

$$s_{2^k} > (k+1) \cdot \frac{1}{2}\,,\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

   Assim (s_n) não é limitada superiormente, portanto: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

2. Seja (a_n) construída pelo processo de indução de modo que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, … , $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Mostre que (a_n) é convergente com limite 2 .
   Provemos, por indução, que (a_n) é crescente:

   (i) $a_1 < a_2$

(ii) Suponhamos válido para $n-1$, isto é: $a_{n-1} < a_n$

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1} \; .$$

Assim $a_n < a_{n+1}$, portanto (a_n) é crescente.

Provemos, por indução, que 3 é limitante superior de (a_n):

(i) $a_1 = \sqrt{2} < 3$

(ii) Suponhamos $a_{n-1} < 3$. Então

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + 3} < \sqrt{9} = 3$$

portanto (a_n) é crescente e limitada superiormente e assim, pelo Teorema Fundametal para seqüências, $(a_n) \to \ell$, mas $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, logo

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \; .$$

$$\ell^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + a_n) = 2 + \lim_{n\to\infty} a_n = 2 + \ell \; .$$

Assim $\ell^2 = 2 + \ell \Rightarrow \ell = 2$ ou $\ell = -1$. Logo $\ell = 2$, pois sabemos que $\ell > 0$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \, ?$

Vejamos alguns termos:

$1 \, , \; \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} \, , \; \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{9} \, , \ldots$

Voltemos ao termo geral:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} \overset{\text{soma de PA}}{=} \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \; .$$

Assim $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \right) = \dfrac{1}{2}$.

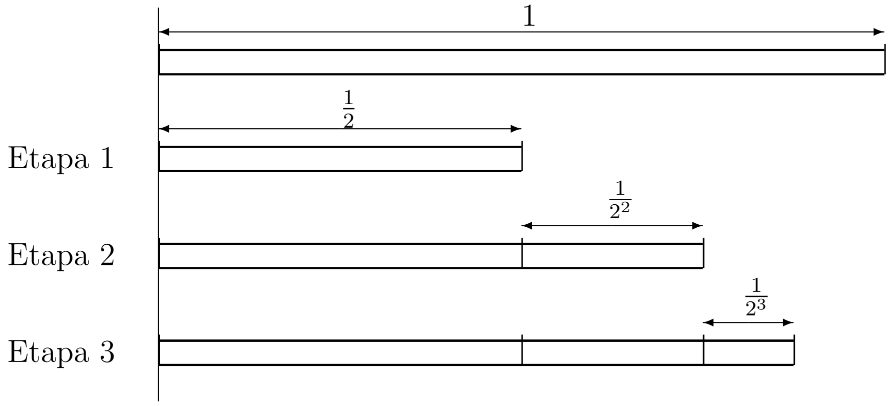
1.2 Séries Numéricas

1.2.1 O que é uma série?

Consideremos uma fita de comprimento 1. Vamos tentar recompô-la, partindo de uma metade, cujo comprimento é $\frac{1}{2}$, etapa 1 do processo.

Cortamos a metade restante ao meio, obtendo uma fita de comprimento $\dfrac{1}{2^2}$, a qual é justaposta à metade inicial, etapa 2 do processo.

Assim sucessivamente.



Na etapa 1 o comprimento da fita é $s_1 = \dfrac{1}{2}$.

Na etapa 2 o comprimento da fita será:

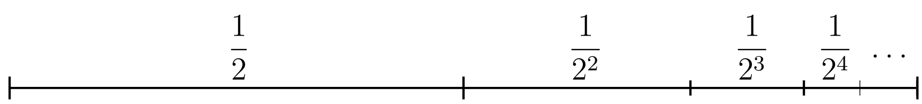
$$s_2 = s_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \; .$$

Na etapa 3 o comprimento da fita será:

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \; .$$

Na etapa n o comprimento da fita será:

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



É natural esperar que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

onde as últimas reticências pretendem indicar que a soma deve ser feita indefinidamente, isto é, trata-se de uma soma com infinitas parcelas.

Parece natural definir tal soma como sendo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. É o que faremos.

Usando a fórmula (que será provada posteriormente)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}\,;\ r \neq 1$$

para o nosso caso, em que $a = \dfrac{1}{2}$ e $r = \dfrac{1}{2}$, vem:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Assim $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Obtivemos, então, com a definição dada de soma infinita, o valor 1, que é o comprimento da fita toda dada inicialmente.

Vamos às definições:

Consideremos a seqüência (a_n) .

A partir da seqüência (a_n) vamos construir a seqüência (s_n) do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
&s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definição 1.2.1. *A seqüência (s_n) é chamada **série associada à seqüência** (a_n). Cada s_n é referido como **soma parcial de ordem n**. Os termos a_n são chamados os **termos da série**.*

Notação: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ ou $\sum a_n$ ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

Exemplos:

1. $(a_n) = ((-1)^{n+1})$.

   Construímos a seqüência (série):

   $s_1 = a_1 = 1$

   $s_2 = a_1 + a_2 = 0$

   $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1$

   $\vdots$

2. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Construímos a seqüência (série):

   $s_1 = 1$

   $s_2 = 1 + \dfrac{1}{2}$

   $\vdots$

   $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

   $\vdots$

3. $(a_n) = \left(\dfrac{6}{10^n}\right) : 0,6\,;\ 0,06\,;\ 0,006\,, \ldots$.

   Construímos a seqüência (série):

   $s_1 = 0,6$

   $s_2 = 0,6 + 0,06 = 0,66$

   $s_3 = 0,66 + 0,006 = 0,666$

   $\vdots$

   Observe que $(s_n) \to \dfrac{2}{3}$.

   Escrevemos

   $\dfrac{2}{3} = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \cdots$.

Definição 1.2.2. *A série $\sum a_n$ é dita **convergente** se a seqüência (s_n) for convergente. Caso contrário a série é dita **divergente**.*

Se a seqüência (s_n) é convergente para $\boldsymbol{S}$ dizemos que a série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$ é ***convergente com soma*** $\boldsymbol{S}$.

Notação: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Portanto, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ queremos dizer que adicionando um número suficiente de termos da série podemos chegar tão próximo quanto quisermos do número S . Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) .$$

Observação: Deve ficar claro que S é o limite de uma seqüência de somas e não é obtido por adição simplesmente.

Exemplos:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ - **Série Telescópica**

   $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

   Assim $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

   Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   Observação: Este é na realidade um dos exemplos de uma ***soma telecópica***: por causa de todos os cancelamentos, a soma colapsa (como um antigo telescópio-luneta) em apenas dois termos.

2. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.

   Aqui $s_n = -1$ para n ímpar e $s_n = 0$ para n par.

   Portanto (s_n) não converge.

3. $\sum_{1}^{\infty} 2^n$ diverge.

   Aqui $s_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.

   (s_n) não é limitada e assim não é convergente.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge - **Série Harmônica**.

Aqui $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
Já vimos anteriormente que $(s_n) \to \infty$.

Algumas séries são importantes pois servem como referência para o estudo de outras. A Série Telescópica, a Série Harmônica são exemplos deste tipo. Outro exemplo seria a **Série Geométrica**.

A **Série Geométrica** $\sum_{n \geq 1} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$ $(a \neq 0)$ é convergente se, e somente se, $|r| < 1$, caso em que sua soma é $\frac{a}{1-r}$.

Assim

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1-r}\,, \quad |r| < 1 \qquad (*)$$

onde r é dito ***razão*** da Série Geométrica.

De fato:

(i) Se $r = 1$ então $s_n = a + a + \cdots + a = na$, que tende a ∞ ou $-\infty$, conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Portanto a série é divergente.

(ii) Se $r \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro:

$$s_n(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n)\,.$$

Portanto $s_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \cdot r^n$.

- Se $|r| < 1$, como vimos anteriormente, $(r^n) \to 0$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n\right) = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \cdot \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}\,.$$

- Se $|r| > 1$ ou $r = -1$, como vimos anteriormente, (r^n) é divergente e pela expressão anterior de s_n o mesmo acontece com ele. Logo a série é divergente. $\square$

Exemplo:

(a) Calcule a soma da série geométrica

$$-2 + \frac{4}{5} - \frac{8}{25} + \cdots$$

(b) Escreva o número $4,7\overline{28} = 4,7282828\cdots$ como quociente de inteiros.

Resolução:

(a) Para descobrir a razão, dividimos o segundo termo pelo primeiro

$$r = \frac{\frac{4}{5}}{-2} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}\,.$$

Como $a = -2$, usamos $(*)$ para obter a soma desejada

$$\frac{-2}{1-(-\frac{2}{5})} = \frac{-2}{1+\frac{2}{5}} = \frac{-2}{\frac{7}{5}} = \frac{-10}{7}\,.$$

(b) Temos:

$$\begin{aligned}
4,7\overline{28} &= 4,7282828\cdots = 4.7 + 0,02828\cdots = \\
&= 4,7 + 0,028 + 0,00028 + 0,0000028 + \cdots = \\
&= \frac{47}{10} + \frac{28}{10^3} + \frac{28}{10^5} + \frac{28}{10^7} + \cdots = \\
&= \frac{47}{10} + \frac{\frac{28}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{47}{10} + \frac{28}{990} = \frac{4681}{990}\,.
\end{aligned}$$

[usamos $(*)$ com $a = \dfrac{28}{10^3}$ e $r = \dfrac{1}{10^2}$]

1.2.2 Propriedades das séries

Lembrando que uma série nada mais é do que uma seqüência, aplicando as propriedades de seqüências obtém-se:

Teorema 1.2.3. *Se* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ *são convergentes e* c *é um número real, tem-se:*

- $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n \pm b_n) = \sum_{n\geq 1} a_n \pm \sum_{n\geq 1} b_n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$

Exemplo: Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} - 5\,\frac{2^n}{3^n}\right)$.

Temos: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3\,.$$

Usando as propriedades anteriores:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} - 5\frac{2^n}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right) - 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3}{2} - 5\cdot 3 = -\frac{27}{2}\,.$$

Exercícios: Calcule

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ Resp.: $\frac{1}{4}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n - 2^n}{6^n}$ Resp.: $\frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$ Resp.: 4

Teorema 1.2.4. *Sejam* $\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{q+n} \quad (2) \end{cases}$

Se (2) *é convergente com soma* b *então* (1) *é convergente com soma*

$$\mathsf{a} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_q + \mathsf{b}$$

Prova: Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ o reduzido de ordem n da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Seja $\bar{s}_n = a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_{q+n}$ o reduzido de ordem n da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{q+n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{q+n} = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots a_q + a_{q+1} + \cdots + a_{q+n}) = \lim_{n\to\infty}[\ (a_1 + a_2 + \cdots + a_q) + \bar{s}_n\ ] = (a_1 + a_2 + \cdots + a_q) + \mathsf{b}$

Assim $(s_n) \to a = a_1 + a_2 + \cdots + a_q + \mathsf{b}$. $\square$

Observação 1: A recíproca é verdadeira.

Observação 2: O resultado anterior nos diz que um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série, ou seja, o seu caráter. Por outro lado, fica claro que a soma da série é afetada pela inclusão ou remoção de um número finito de termos.

Exemplo: Já vimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$ Consideremos agora $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(i) Pelo teorema anterior temos :
$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}) \ = \ 1 - \frac{9}{12} \ = \ 1 - \frac{3}{4} \ = \ \frac{1}{4}$$

(ii) Fazendo diretamente pela definição:
$$s_n = \frac{1}{4.5} + \ldots \frac{1}{(4+n).(5+n)} \ = \ (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) \cdots + (\frac{1}{4+n} - \frac{1}{5+n}) \ = \ \frac{1}{4} - \frac{1}{5+n}$$

Logo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{4} - \frac{1}{5+n}) \ = \ \frac{1}{4}$

—— / / —— / / ——

Até agora aprendemos a calcular apenas as somas das séries geométricas e da série telescópica.

Na verdade calcular a soma de uma série é, em geral, muito difícil. Podemos, no entanto, fabricar exemplos de séries para as quais conseguimos calcular suas somas, observando o seguinte:

Se $a_n = b_n - b_{n+1}$, então

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + (\cancel{b_3} - b_4) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} .$$

Portanto, existe o limite de $s_n \Leftrightarrow$ existe o limite de b_{n+1} .

Caso afirmativo: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$. Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Exemplos:

1. Fazendo $b_n = \dfrac{1}{n}$ temos
$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \ .$$
Pela fórmula anterior
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \ .$$
(Já visto anteriormente)

2. Fazendo $b_n = \ln n$, temos
$$a_n = \ln n - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \ .$$
Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty$, temos então que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ é divergente. Podemos observar que também será divergente a série
$$\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

3. Fazendo $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, temos
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \, .$$
Assim
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \, .$$

1.2.3 Uma condição necessária à convergência

Teorema 1.2.5. *Se* $\sum a_n$ *é convergente então* $(a_n) \to 0$.

Prova: Suponhamos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Temos
$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$
Portanto $(a_n) \to 0$. □

Observação: É importante ressaltar que a condição anterior **não** é suficiente para garantir a convergência de uma série, isto é, se o termo geral a_n tende a zero para n tendendo a ∞, não há garantia de que a série converge.

Exemplos:

1. $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ diverge

   $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad (a_n) \to 0$

   No entanto: $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ $\qquad (s_n) \to \infty$ (visto anterioremente)

2. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ é divergente (visto no item anterior) e no entanto

   $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0\,.$

Como conseqüência imediata do Teorema anterior temos:

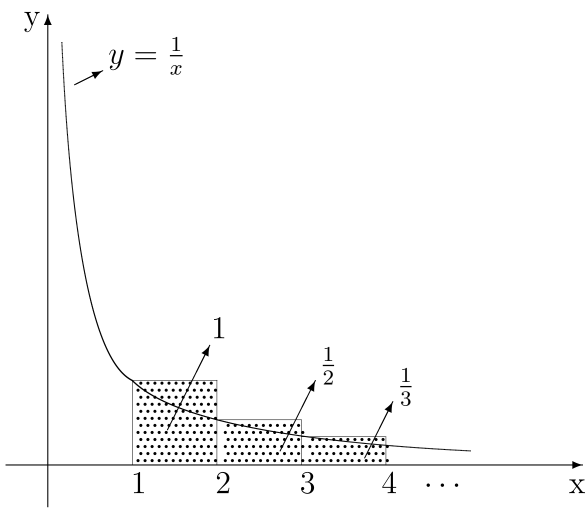
Critério de Divergência: Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então $\sum a_n$ é divergente.

Exemplos:

As séries $\sum (-1)^n n^2$ e $\sum \frac{n}{2n+1}$ são divergentes, pois seus termos gerais não tendem a zero, para n tendendo a ∞.

— // — // —

Já vimos que $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ é divergente. Vamos aqui comprovar este fato de uma outra maneira.



Assim:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Portanto $\ln(n+1) < s_n$.

Como $[(\ln(n+1)) \to \infty] \Rightarrow [(s_n) \to \infty]$.

Logo $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Vamos agora estimar n tal que $s_n \geq 10$.

(i) Já vimos anteriormente que

$$S_{2^k} > (k+1) \cdot \frac{1}{2} \geq 10 \Rightarrow k \geq 19 \Rightarrow n \geq 524.288\,.$$

(ii) Pela estimativa vista logo acima temos

$$s_n \geq \ln(n+1) \geq 10 \Rightarrow n \geq 23.000\,.$$

De fato: $\ln 23.000 \simeq 10,04$.

Assim $s_{23.000} > 10$ - melhorando sensivelmente a nossa estimativa do item (i).

1.3 Séries de termos não negativos

Passaremos a estudar condições sob as quais uma série converge ou diverge, sem ter de tentar a tarefa, em geral difícil, de calcular sua soma.

Inicialmente, vamos nos restringir a séries de termos ≥ 0 .

1.3.1 Critério da Comparação

O resultado mais importante, sobre o qual outros se apoiam, e que permite decidir se uma série converge ou não comparando-a com outra série de comportamento conhecido é o seguinte:

Critério da Comparação: Suponhamos que, a partir de um certo índice, verifica-se $0 \leq a_n \leq b_n$.

(a) Se $\sum b_n$ é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

(b) Se $\sum a_n$ é divergente, então $\sum b_n$ é divergenete.

Prova:

(a) Para facilitar vamos supor $\quad 0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$

Temos:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.$$

O que mostra que a seqüência $\;s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\;$ é limitada superiormente por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.$

Como (s_n) é crescente, pois $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$, podemos dizer, pelo Teorema Fundamental para Seqüências, que ela é convergente, o que quer dizer que a série $\sum a_n$ é convergente (com soma $\;\leq \displaystyle\sum_{1}^{\infty} b_n\,)$.

(b) Como exercício.

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ é convergente.
   De fato,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \;\leq\; \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n(n+1)} \\ \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \end{array}\right\} \underset{\text{Comparação}}{\overset{\text{Critério}}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \text{ é convergente,}$$

com soma $\;\leq\; 1\,.$

Obs: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, com soma $\leq 1+1=2$. Na realidade: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler - 1736).

2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.
   De fato,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{array}\right\} \underset{\text{Comparação}}{\overset{\text{Critério}}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

Exercícios: Verifique se as séries abaixo convergem. Caso positivo, dê uma estimativa para a soma.

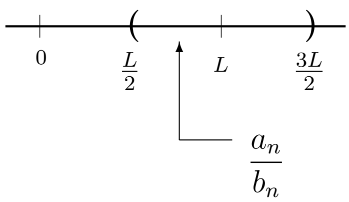
1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ — Resp.: converge, com soma ≤ 1
2. $\displaystyle\sum \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2}$ — Resp.: converge, com soma ≤ 3
3. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ — Resp.: diverge.
4. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} 2^{\frac{2n+1}{2}}$ — Resp.: diverge.

O critério da comparação acarreta o seguinte critério, em geral mais fácil de ser aplicado.

Critério da Comparação usando Limite:

Suponhamos que a partir de um certo índice, verifica-se $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0\,(L \in \mathbb{R})$. Então $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Prova: Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{L}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{3L}{2}$ quando $n > N$, ou seja: $n > N \Rightarrow 0 < \dfrac{L}{2}\, b_n < a_n < \dfrac{3L}{2}\, b_n$.



Se $\sum a_n$ converge então $\sum \frac{L}{2}\, b_n$ converge (Critério da Comparação anterior).

Logo $\sum b_n = \frac{2}{L} \sum \frac{L}{2}\, b_n$ converge (Teo. 1.2.3).

Inversamente, se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge, já que ela é minorante de $\sum \frac{3L}{2}\, b_n$, a qual é convergente (Teo. 1.2.3 e Critério da Comparação anterior).

Temos provado:

$$\sum a_n \;\text{ converge } \iff \sum b_n \;\text{ converge.}$$

Assim

$$\sum a_n \;\text{ diverge } \iff \sum b_n \;\text{ diverge.}$$

$\square$

Exercício: Prove que se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge (Aqui $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$). Exiba exemplos para mostrar que se $\sum a_n$ converge nada podemos concluir sobre $\sum b_n$.

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3n+5}{n \cdot 2^n}$.

   Consideremos a série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ - convergente

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+5}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n} = 3 > 0\,.$$

   Assim, pelo Critério da Comparação usando Limite, a série dada é convergente.

2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$.

   Consideremos a série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ - divergente

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n^3}{n^3+1} = 1 > 0\,.$$

   Assim, pelo Critério da Comparação usando Limite, a série dada é divergente.

1.3.2 Critério da Integral (Cauchy-1837)

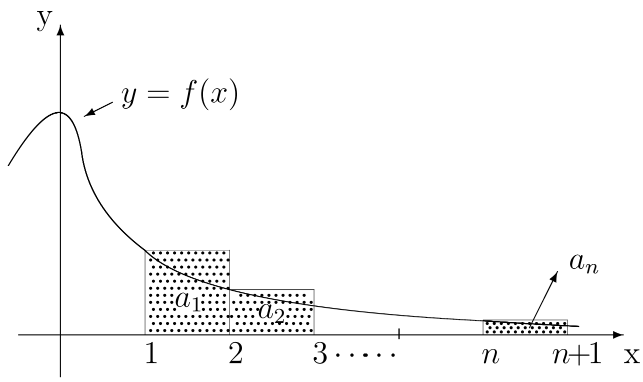
Dada a série $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Suponhamos que exista uma função $f(x) > 0$, contínua e decrescente (para $x \geq 1$) tal que $f(n) = a_n$.

Então

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \text{ é convergente} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ é convergente.}$$

Prova: Comparando as áreas da figura a seguir temos:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + \cdots + a_n \qquad \textbf{(1)}$$

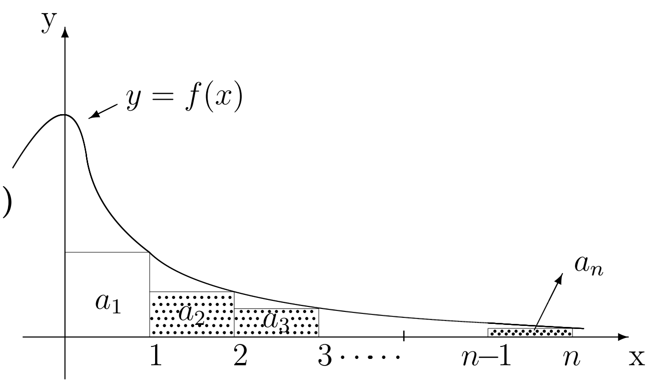


Comparando as áreas da figura a seguir temos:

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx$$

ou

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$



(i) Se a integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente a desigualdade **(2)** fornece

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx = M$$

desde que $f(x) \geq 0$. Logo (s_n) seria uma seqüência crescente e limitada superiormente e assim, pelo Teo. Fundamental para Seqüências, seria convergente. Isto significa que $\sum a_n$ converge.

(ii) Se a integral $\int_1^\infty f(x)dx$ for divergente então $\left(\int_1^n f(x)dx\right) \to \infty$, quando $n \to \infty$, porque $f(x) \geq 0$. A desigualdade **(1)** fornece então que $s_n \to \infty$ e assim $\sum a_n$ diverge.

Assim: A série e a integral são ambas convergentes ou divergentes. $\square$

Exemplo: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \iff p > 1}$

(i) $p > 0$

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, contínua, positiva, decrescente sobre $[1, \infty)$. Ainda $f(n) = \dfrac{1}{n^p}$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge } \overset{\text{Crit. da}}{\underset{\text{Integral}}{\iff}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge } \overset{\text{já}}{\underset{\text{visto}}{\iff}} p > 1\,.$$

(ii) $p \leq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0 \quad \overset{\text{Critério}}{\underset{\text{Divergência}}{\Longrightarrow}} \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge}$$

Obs. 1: A série $\sum \frac{1}{n}$ é chamada **série harmônica** e a série $\sum \frac{1}{n^p}$ de **série harmônica generalizada**.

Obs. 2: $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler - 1736)

Prova longa. Para maiores detalhes vide Simmons - pg. 701.

Pelo resultado anterior sabemos que $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente. Qual seria a sua soma? Resposta: Problema em aberto ainda hoje. Para maiores detalhes vide Simmons pg. 87.

Exercício: Estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Faremos de dois modos:

(a) Usando o Critério da Comparação:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{array}\right\} \overset{\text{Critério}}{\underset{\text{Comparação}}{\Longrightarrow}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \text{ converge}$$

(b) Usando o Critério da Integral:

Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, contínua, positiva e descrescente em $[1, \infty)$.

Notemos que $f(n) = \dfrac{1}{1+n^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\text{arctg } b - \text{arctg } 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Logo a série $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ é convergente.

—— / / —— / / ——

Suponhamos que o Teste da Integral possa ser usado para mostrar que a série $\sum a_n$ é convergente e que desejamos encontrar uma aproximação para a soma S da série.

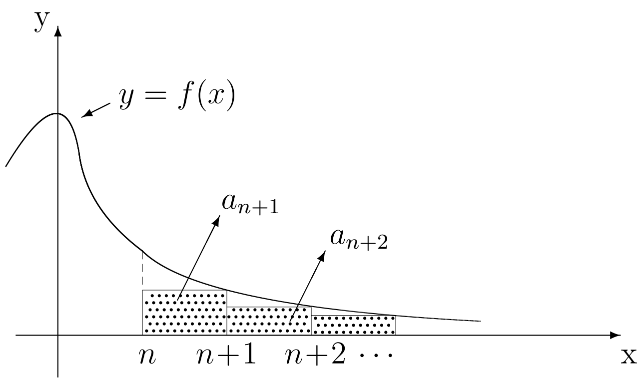
A diferença entre a soma S e a n-ésima soma parcial s_n é o **resto de ordem $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{R_n}$** .

$$R_n = S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

O resto R_n é o erro feito quando a soma real S é estimada usando-se a n-ésima soma parcial s_n .

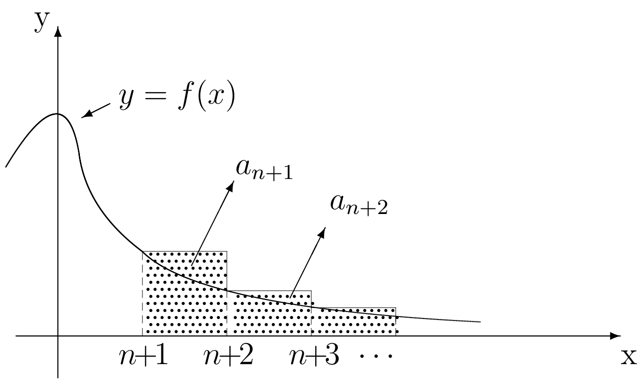
A figura ao lado fornece:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$$



A figura ao lado fornece:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx$$



Acabamos de provar a seguinte estimativa para o erro:

Teorema 1.3.1. *Se* $\sum a_n$ *convergir pelo Teste da Integral e* $R_n = S - s_n$*, então*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Exemplo: Aproxime a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ com erro $\leq 0,005$.

Erro $\leq 0,005$ significa que temos de encontrar um valor de n tal que $R_n \leq 0,005$. Como

$$R_n \leq \int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

fazemos $\dfrac{1}{2n^2} \leq 0,005$.

Resolvendo, obtemos: $n^2 \geq \dfrac{1}{0,01} = 100 \quad \text{ou} \quad n \geq 10$.

Precisamos de 10 termos para garantir precisão de 0,005.

Assim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \simeq s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \simeq 1,1975$, com erro de no máximo 0,005.

Exercício: Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge e encontre o número de termos necessários para se obter sua soma com erro $\leq 0,05$. (Resp. $n \geq 4,85 \times 10^8$)

1.3.3 Critério da Razão (ou de D'Alembert)

Seja $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

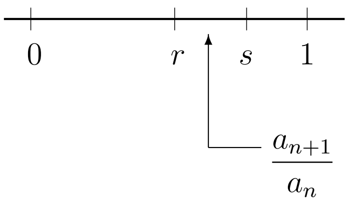
- Se $r < 1$ então $\sum a_n$ converge.
- Se $r > 1$ então $\sum a_n$ diverge.

Prova:

(i) Suponhamos $r < 1$.

Escolhemos um número s tal que $r < s < 1$.

Então como $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to r$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(n \geq N \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < s.\right)$



Logo:

$$0 < a_{N+1} < s \cdot a_N$$
$$0 < a_{N+2} \le s \cdot a_{N+1} \le s^2 \cdot a_N$$
$$\vdots$$
$$0 < a_{N+k} \le s^k \cdot a_N$$

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_N\, s^k = a_N \sum_{k=1}^{\infty} s^k$ converge (série geométrica de razão com módulo < 1) o Teste da Comparação mostra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ converge e isto implica na convergência de $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$.

(ii) Suponhamos $r > 1$ $\;(r \in \mathbb{R}$ ou $r = \infty)$.

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, existe N tal que $n \ge N \Rightarrow 1 \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, ou seja:

$$0 < a_N < a_{N+k}\,, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Logo $(a_n) \not\to 0$ e portanto $\sum a_n$ diverge. $\square$

Observação: Quando $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1$ nada se pode afirmar. Vejamos os exemplos:

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n^2}\,.$$

Temos que $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge e $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge e no entanto $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1$, nos dois casos.

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}$

   Aqui $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \dfrac{1}{n+1} \to 0 < 1\,.$

   Assim, pelo Critério da Razão, $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge.

2. $\sum \frac{n}{3^n}$

Aqui $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3} < 1\,.$

Logo, pelo Critério da Razão, $\sum \frac{n}{3^n}$ converge.

3. $\sum \frac{1}{n\,2^n}$

Aqui $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+1)\cdot 2} \to \frac{1}{2} < 1\,.$

Logo, pelo Critério da Razão, $\sum \frac{1}{n\,2^n}$ converge.

4. $\sum \frac{n!}{3^n}$

Aqui $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3} \to \infty\,.$

Logo, pelo Critério da Razão, $\sum \frac{n!}{3^n}$ diverge.

5. $\sum \frac{n^n}{n!}$

Aqui $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1\,.$

Logo, pelo Critério da Razão, $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverge.

6. $\sum \frac{1}{2k+1}$

Aqui $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2+\frac{1}{k}}{2+\frac{3}{k}} \to 1\,.$

Assim, pelo Critério da Razão, não podemos concluir nada, mas

$$0 < \frac{1}{2(k+1)} < \frac{1}{2k+1}\,.$$

Como $\sum \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k+1}$ é divergente, temos pelo Critério da Comparação, que $\sum \frac{1}{2k+1}$ é divergente.

1.3.4 Critério da Raiz (ou de Cauchy)

Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r\,.$

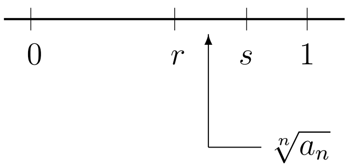
- Se $r < 1$ então $\sum a_n$ converge.
- Se $r > 1$ então $\sum a_n$ diverge.

Prova:

(i) Suponhamos $r < 1$.

Escolhemos um número s tal que $r < s < 1$.

Então como $(\sqrt[n]{a_n}) \to r$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(n \geq N \to \sqrt[n]{a_n} \leq s)$ ou seja $n \geq N \Rightarrow a_n < s^n$.

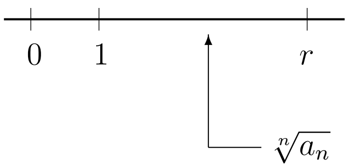


Como $\sum\limits_{n=N}^{\infty} s^n$ converge (Série Geométrica de razão com módulo < 1) temos que $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ converge (pelo Critério da Comparação).

Assim $\sum a_n$ converge.

(ii) Suponhamos $r > 1$.

Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{a_n}$.



Assim: $(n \geq N \Rightarrow 1 \leq a_n)$. Logo $(a_n) \not\to 0$ e portanto $\sum a_n$ diverge. $\square$

Observação: Quando $\left(\sqrt[n]{a_n}\right) \to 1$ nada se pode afirmar. Vejamos os exemplos: consideremos as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$. Temos que $\sum \frac{1}{n}$ diverge e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge e no entanto:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \,.$$

De fato:

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \,.$$

Como $\left(\frac{1}{n} \cdot \ln n\right) \to 0$ $\left[\left(\frac{\ln x}{x}\right) \to 0\right]$ e a função exponencial é contínua no zero temos que $\left(\sqrt[n]{n}\right) \to 1$.

Analogamente $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right) \to 1$

Exemplos:

1. $\sum \dfrac{x^n}{n^n}\,, \quad x \geq 0$

   $\left(\dfrac{x^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{x}{n} \to 0\,.$

   Pelo Critério da Raiz $\sum \dfrac{x^n}{n^n}$ converge, $\forall\, x \geq 0\,.$

2. $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^n}$

   $\left(\dfrac{1}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\ln n} \to 0\,.$

   Pelo Critério da Raiz $\sum \dfrac{1}{(\ln n)}\, n$ converge.

3. $\sum \dfrac{2^k}{k^3}$

   $\left(\dfrac{2^k}{k^3}\right)^{\frac{1}{k}} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{3}{k}} = 2\left[\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^3 \to 2 \cdot 1^3 = 2\,. \quad \left[\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \to 1\,, \text{ visto anteriormente}\right]$

   Pelo Critério da Raiz $\sum \dfrac{2^k}{k^3}$ diverge.

4. $\sum \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^k$

   $\left[\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}} = 1 - \dfrac{1}{k} \to 1\,.$

   Pelo Critério da Raiz não podemos afirmar nada.

   Notemos que $\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^k \to \dfrac{1}{e} \neq 0$. Logo, pelo Critério da Divergência, a série dada diverge.

Observação: Pode-se provar que se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L\,.$ Assim, quando, pelo Critério da Raiz, obtemos $L = 1\,$, não adianta apelar para o critério da Razão, porque este também fornecerá $L = 1\,.$

1.4 Séries de termos quaisquer

1.4.1 Convergência Absoluta

Definição 1.4.1. *A série $\sum a_n$ é dita* ***absolutamente convergente*** *se a série $\sum |a_n|$ for convergente.*

Teorema 1.4.2. *Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n$ é convergente.*

Prova: Seja $b_n = a_n + |a_n|$.

Então $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ ou seja $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$.

Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum 2|a_n|$ é convergente e pelo Critério da Comparação $\sum b_n$ é convergente. Como $a_n = b_n - |a_n|$ temos que $\sum a_n = \sum(b_n - |a_n|) = \sum b_n - \sum |a_n|$ é convergente como diferença de duas séries convergentes. $\square$

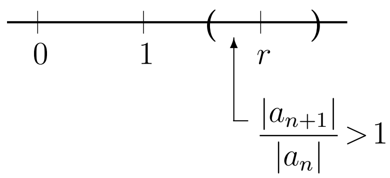
Obs.: Acabamos de mostrar que convergência absoluta implica em convergência. A recíproca **não** é verdadeira.

Exemplo: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ é uma série convergente (veremos adiante). A série dos módulos é $\sum \frac{1}{n}$, que é divergente.

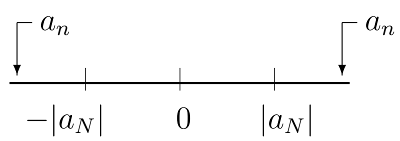
Uma série que converge, mas **não** converge absolutamente é dita **condicionalmente convergente**.

Exercícios Importantes:

1. Dada a série $\sum a_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r > 1$ $(r \in \mathbb{R}$ ou $r = \infty)$.
   Mostre que a série é divergente.
   Resolução: Pela hipótese, sabemos que $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(n \geq N \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1\right)$.



   Assim $n \geq N \Rightarrow |a_n| > |a_N|$. Logo $(a_n) \not\to 0 \overset{\text{Crit.}}{\underset{\text{Div.}}{\Longrightarrow}} \sum a_n$ diverge.



2. Dada a série $\sum a_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r > 1$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r = \infty$). Mostre que a série é divergente.

   Sugestão: Conclua que $(a_n) \not\to 0$.

Tendo em vista o Critério da Razão enunciado em **1.3.3.** e o exercício 1 anterior podemos enunciar:

Critério da Razão Geral:

Seja $\sum a_n$, onde $a_n \neq 0$.

(a) Se $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \to r < 1$, a série é absolutamente convergente.

(b) Se $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \to r > 1$, a série é divergente.

(c) Se $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \to 1$, a série pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

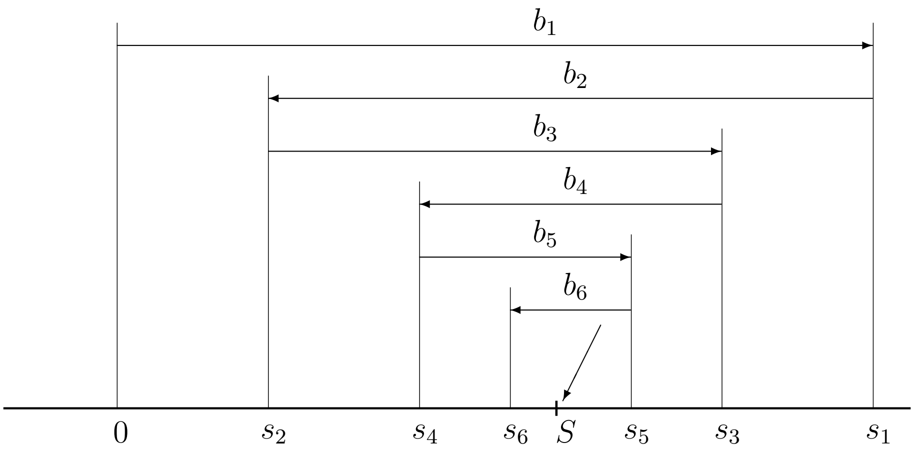
Um enunciado análogo pode ser dado para o **Critério da Raiz Geral**.

1.4.2 Séries Alternadas

Definição 1.4.3. *Uma série do tipo* $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots (-1)^{n-1} b_n + \cdots$, *onde* $b_n > 0$ *é chamada uma* ***série alternada***.

Teorema 1.4.4 (Critério de Leibniz (1705)). *Uma série alternada* $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, $b_n > 0$ *em que* (b_n) *é decrescente e infinitésima é convergente com soma* S , *onde* $|S - s_n| \leq b_{n+1}$.

A idéia da prova pode ser retirada da figura a seguir:



Por exemplo: $|S - s_5| \leq b_6$.

Passemos então a prova:

$$s_{2n} = s_{2n-2} + \underbrace{b_{2n-1} - b_{2n}}_{\geq\ 0} \geq s_{2n-2} \, .$$

Assim (s_{2n}) é crescente. Ainda:

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \leq b_1 \, .$$

Logo (s_{2n}) é crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema Fundamental para Seqüências (s_{2n}) é convergente, digamos $(s_{2n}) \to S$.

As somas parciais ímpares podem ser vistas como $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1}$. Assim

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = S + 0 = S \, .$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para S , temos que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$.

Para finalizar, da ilustração anterior fica claro que $|S - s_n| \leq b_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ - **Série Harmônica Alternada**.

   $(b_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$ e (b_n) é decrescente.

   Pelo Critério de Leibiniz, a série é convergente.

   Ainda: **Não** é absolutamente convergente.

   Assim: É uma série **condicionalmente convergente**.

2. $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \cdots$

   Então $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. $\quad (b_n) \to 0$, decrescente.

   Pelo Critério de Leibiniz, a série é convergente.

   Na realidade a série é absolutamente convergente $\left(\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\right)$.

3. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$ é alternada, sendo que $b_n = \dfrac{n}{2n-1}$ é decrescente, mas $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2} \neq 0$ e assim o Critério de Leibniz **não** se aplica.

   Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n}{2n-1}$ não existe, e assim pelo Critério para Divergência, a série dada é divergente.

Exercícios resolvidos:

1. Teste a série $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n+1}$ para convergência ou divergência.

   Resolução: A série dada é alternada, onde $b_n = \dfrac{\ln n}{n+1}$.

   A condição $(b_n) \to 0$ pode ser verificada sem maiores problemas.

   A condição (b_n) decrescente já não é imediata, como nos exemplos anteriores.

   Consideremos a função de variável real correspondente $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$ cuja derivada é $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$.

   A derivada é negativa, e assim a função é decrescente, se $\ln x \geq 1 + \dfrac{1}{x}$.

   Observemos que $1 + \dfrac{1}{x} \leq 2$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

   Assim a seqüência (b_n) decresce quando $\ln n > 2$, ou seja $n \geq 8$.

   Logo, pelo Critério de Leibniz, a série $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n+1}$ converge.

   Portanto a série original também converge.

2. Prove que a série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ converge. Quantos termos são necessários a fim de se obter um erro que não exceda 0,001 em valor absoluto?

   Resolução: $(b_n) = \left(\dfrac{1}{2n-1}\right) \to 0$, decrescente.

   Pelo Critério de Leibniz a série dada é convergente. Ainda:

$$|S - s_n| \leq b_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} \leq 0,001 \Leftrightarrow 2n+1 \geq \frac{1}{0,001} = 1000 \Leftrightarrow n \geq 500\,.$$

   Portanto são necessários 500 termos, no mínimo.

3. Idem ao anterior, para a série $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!}$

   Resolução: $(b_n) = \left(\dfrac{1}{(2n-1)!}\right) \to 0$, decrescente.

   Pelo Critério de Leibniz a série dada é convergente. Ainda:

$$|S - s_n| \leq b_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1)!} \leq 0,001 \Leftrightarrow (2n+1)! \geq 1000 \Leftrightarrow n \geq 3,.$$

   Assim

$$S \simeq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} \simeq 0,841\,.$$

Portanto, $S \simeq 0,84$ com duas casas decimais exatas.

Note como a convergência desta série é bem "mais rápida" do que a da série do exercício anterior.

4. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$.

Resolução: Temos uma série alternada.

$(b_n) = \left(\dfrac{1}{n(\ln n)^2} \right) \to 0$, decrescente. Pelo Critério de Leibniz é convergente.

Analisemos a convergência absoluta.

Vamos aplicar o Critério da Integral.

$f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, contínua, decrescente para $x \geq 2$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} \overset{u=\ln x}{=} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\ln x}\,.$$

Assim: $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \underbrace{\frac{1}{\ln b}}_{\downarrow \atop 0} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Portanto, a série converge absolutamente.

Obs.: Séries do tipo $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ são chamadas **Séries de Abel**. Temos o resultado:

$$\boxed{\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ converge} \Leftrightarrow \ p > 1\,.}$$

5. Seja a série alternada:

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$$

Observe que $(b_n) \to 0$ e que a série é divergente. Falha o Critério de Leibniz?

Resolução: $s_2 = 1$, $s_4 = 1 + \dfrac{1}{2}$, $s_6 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$, ...

Temos: $(s_{2n}) \to \infty$ e assim a série é divergente. Não temos falha do Critério de Leibniz. O que acontece é que uma das hipóteses do critério não está satisfeita. Neste caso, (b_n) **não** é decrescente.

6. Seja a série alternada:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{2^4}+\cdots$$

Mostre que a série dada é divergente e que $(b_n)\to 0$. A seqüência (b_n) pode ser decrescente?

Resolução: Neste caso temos diferença de duas séries, a saber: $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ (divergente) com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (convergente). Assim a série dada é divergente.

Observemos que $(b_n)\to 0$.

(b_n) não pode ser decrescente, pois se o fosse estaríamos nas condições do Critério de Leibniz e a série seria convergente.

Exercícios Propostos:

1. Mostre que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes e $a_n\geq 0$, $b_n\geq 0$ então $\sum a_n\, b_n$ é convergente.

2. Caso possível, dê um exemplo de um par de séries convergentes $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tal que $\sum a_n\, b_n$ seja divergente.

1.4.3 Reagrupamentos - Parenteses

Consideremos a série convergente $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Tomemos

$$(*) \qquad S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

ou

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\cdots$$

Enxertando zeros teremos ainda

$$(**) \qquad \frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}\ \cdots$$

Somando $(*)$ e $(**)$ obtemos:

$$\frac{3}{2}S=1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\ \cdots$$

Cancelando os zeros

$$(***) \qquad \frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \ \cdots$$

Comparando com $(*)$ vemos que as duas séries têm os mesmos termos. Eles só estão **reagrupados** de formas diferentes.

Dizemos que $(***)$ é um **reagrupamento** de $(*)$.

Observe: A seqüência das reduzidas da série $(*)$ é completamente diferente da série $(***)$.

Então: Quando reagrupamos uma série podemos alterar sua soma. Isto vem enfatizar mais uma vez que série infinita **não** é simplesmente uma soma.

Prova-se:

1. Se uma série é condicionalmente convergente, então, mediante reagrupamentos convenientes podemos obter uma série divergente ou uma série convergente para uma soma pré escolhida S (vide: Theory and Applic. of Inf. Series - Konrad Knopp's - pgs. 138-139; 318-320).

2. Se a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, com soma S, então todo reagrupamento de $\sum a_n$ converge para S (vide: Advanced Calculus - Buck - pg. 169). (Esta é uma das razões para a importância da convergência absoluta)

Outra operação com séries que pode alterar soma é a colocação ou não de parenteses.

Exemplo:

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} : 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$ diverge.

Façamos: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$ converge para 0

ou ainda

$1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots$ converge para 1.

Analise as seqüências reduzidas destas três séries e veja como elas são completamente diferentes.

Prova-se:

Se a série inicial é convergente qualquer agrupamento de seus termos em parenteses não alterará a sua soma. (Tente provar. Não é muito difícil) $(*)$

$(*)$ Exemplo: $\quad a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) \cdots$

Seqüência das reduzidas é uma subseqüência da seqüência das reduzidas original.

1.4.4 Complemento

Onde o Cálculo é mais potente do que computadores

Erro comum: Truncando uma série o erro que se comete é menor do que o primeiro termo negligenciado.

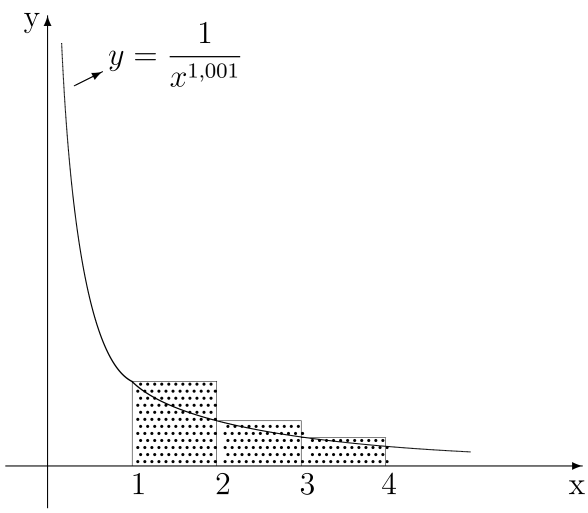
$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1,001}} \quad (\text{série convergente}, \ \ p > 1)\,.$$

Vamos somar até que $\dfrac{1}{n^{1,001}} < 0,\underbrace{00000000}_{8}5$ ou seja $n = N = 196.217.287\,.$

Depois de usar um computador veloz teríamos $S_N = \displaystyle\sum_1^N \frac{1}{n^{1,001}} < 19,5\,,$

$$\text{mas:} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^{1,001}} > \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,001}} = 1000\ .$$

De fato:



$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,001}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^{1,001}} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-0,001}}{-0,001}\Bigg|_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-0,001}}{-0,001} + \frac{1}{0,001}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{-0,001\, b^{0,001}} + 1000\right) = 1000$$

Assim, usando o computador teríamos chegado a menos do que 2% da resposta correta.

Mais ainda:

Adicionando 10^{100} termos obteríamos ainda uma soma menor do que 207.

Observação: $10^{100} = 1$googol - é maior do que o número de partículas elementares no sistema solar.